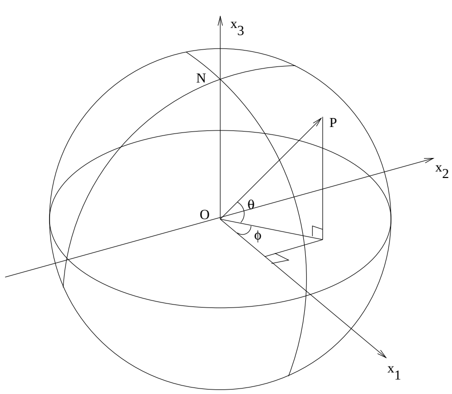
3 Jordklotets geometri

Jordens form är inte perfekt sfärisk. Ekvatorsradien (ca 6378km) är något större än polradien (6356km). Vi skall emellertid låta jorden representeras av en sfär.

Jordklotet roterar kring en axel genom sydpolen och nordpolen. Vinkelrät mot denna axel går genom medelpunkten det så kallade *ekvatorsplanet*. Ett godtyckligt plan som är vinkelrät mot ekvatorsplanet och som går genom medelpunkten, skär ut en *meridian*. En av dessa kallas *nollmeridianen*. (Det är den meridian som passerar genom observatoriet i Greenwich.) Genom en given punkt på sfären går precis en meridian, vilken anger punktens *longitud* (eller *längdgrad*) i förhållande till nollmeridianen, genom att ange hur långt (mätt i grader) åt öster eller väster man måste gå. Man talar till exempel om $60°$ västlig längd (eller longitud $60°W$).

För att ange en punkts position i förhållande till ekvatorsplanet inför man *parallellcirklar*. Genom en given punkt går precis en parallellcirkel, vilken anger punktens *latitud* (eller *breddgrad*) norr eller söder om ekvatorn, (mätt i grader). Parallellcirkeln på latitud $23°S$ ($23°$ sydlig bredd) passerar till exempel (ungefär) genom Sao Paolo i Sydamerika. Detta är Stenbockens vändkrets. Motsvarande parallellcirkel på norra halvklotet kallas Kräftans vändkrets ($23°N$). Den passerar strax söder om Assuan i Egypten. Vändkretsarna är de parallellcirklar, där solen står i zenit (solens strålar bildar rät vinkel mot jordytan) mitt på dagen vid resp. halvklots sommarsolstånd (den dag då solen står som högst).

För den matematiska behandlingen av jordytans geometri är detta traditionella sätt att ange en orts position inte alldeles ändamålsenligt. Vi kommer i stället att göra på följande sätt. Låt R vara jordens radie (säg 6370km). Jordytan representeras av en sfär i $\mathbb{R}^3$ med medelpunkt i origo och radien R, alltså av $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2$. Nordpolen reperesenteras av punkten $(0,0,R)$ och sydpolen av $(0,0,-R)$. En godtycklig punkt P har koordinater (x_1, x_2, x_3) där (se figuren nedan)



$$\begin{cases} x_1 = R\cos\theta\cos\phi \\ x_2 = R\cos\theta\sin\phi \\ x_3 = R\sin\theta \end{cases}$$

Här låter vi vinklarna ϕ och θ variera i intervallen $-\pi \le \phi \le \pi$ och $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$. Således svarar västlig längd mot ϕ i intervallet $-\pi \le \phi \le 0$, östlig längd mot $0 \le \phi \le \pi$, sydlig bredd mot $-\pi/2 \le \theta \le 0$ och nordlig bredd mot $0 \le \theta \le \pi/2$.

I fortsättningen väljer vi jordradien som längdenhet, vilket betyder att vi låter jordytan representeras av enhetssfären

$$\mathbb{S} = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

Varje $\mathbf{x} \in \mathbb{S}$ kan då entydigt skrivas

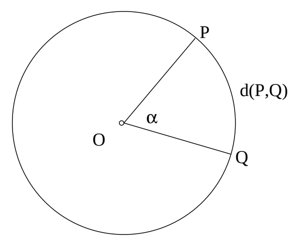
$$\mathbf{x} = (\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, \sin\theta), \quad \text{där} \quad -\pi \leq \phi \leq \pi, \quad -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$$

Geodetiska linjer och avstånd på sfären

En *storcirkel* på $\mathbb{S}$ är snitt mellan $\mathbb{S}$ och ett plan genom origo. Meridianerna är exempel på storcirklar. Parallellcirklar är däremot i regel inte storcirklar. Den enda parallellcirkel som är en storcirkel är ekvatorn.

Genom två olika punkter P och Q på sfären går minst en storcirkel, nämligen den som skärs ut av planet genom origo, P och Q. Om P och Q är *antipoder*, dvs ligger på samma diameter, så finns det flera sådana storcirklar. I annat fall finns det precis en storcirkel genom P och Q.

Avståndet $d(P, Q)$ mellan P och Q är längden av den kortaste bågen på den storcirkel som sammanbinder P och Q. Eftersom sfären antas ha radien 1 innebär detta att avståndet $d(P, Q)$ samtidigt är vinkeln mellan vektorerna $\overrightarrow{OP}$ och $\overrightarrow{OQ}$.



Man kan bevisa att en godtycklig kurva som sammanbinder två punkter P och Q och vars alla punkter ligger på sfären, måste ha en längd som är $\geq d(P, Q)$. Avståndet $d(P, Q)$ är alltså längden av den kortaste väg som en resenär kan färdas på jordytan från P till Q.

Ordet *geodetisk kurva* (eller geodetisk linje) används ofta som synonymt med ordet storcirkel på sfären. På en godtycklig yta använd ordet geodetisk kurva för kurvor av kortast möjliga längd mellan givna punkter på ytan.

Vi skall nu definiera den sfäriska geometrin i den anda som Klein föreslog i sitt Erlangenprogramm, genom att beskriva vilken transformationsgrupp vi skall arbeta med.

Definition 1 På sfären $\mathbb{S}$ betraktar vi alla *sfäriska isometrier* $T : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$, där T definieras med hjälp av en ortogonal $3 \times 3-$matris $\mathbf{U}$ (så att $\mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{I}$), genom formeln

$$T(P) = T(\mathbf{x}) = \mathbf{U}\mathbf{x}, \quad \text{där} \quad \overrightarrow{OP} = \mathbf{x} \in \mathbb{S}$$

De sfäriska isometrierna bildar en transformationsgrupp, vilket innebär att sammansättning av två isometrier och inversen till en sådan också är isometrier (ty om $\mathbf{U}$ och $\mathbf{V}$ är ortogonala matriser så är $\mathbf{UV}$ och $\mathbf{U}^{-1}$ också ortogonala). Man kan beskriva varje sfärisk isometri som sammansättning av *rotation kring en axel genom origo* och (eventuellt) *spegling i ett plan eller en linje genom origo*

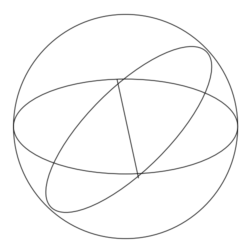
Geodetiska linjer är invarianta under alla sfäriska isometrier, ty varje avbildning $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ux}$

avbildas en storcirkel

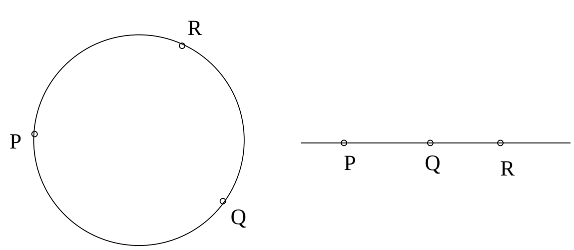
Om nämligen

. Genom två punkter

metrin går en rät linje



Observera också en annan skillnad mellan geodeterna på sfären och linjerna i planet. Det finns på sfären ingen naturlig ordningsrelation mellan punkterna. Givet tre punkter P, Q, R på en storcirkel, så kan man inte utan vidare säga att en punkt ligger mellan de båda andra, så som fallet är med tre punkter på en rät linje i planet.

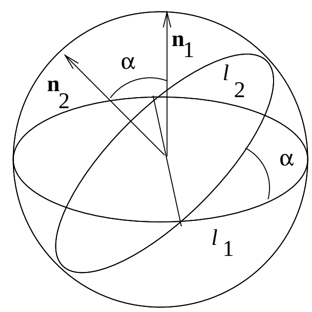


Vinklar och sfäriska trianglar

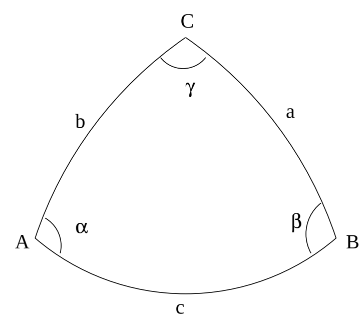
Om ℓ_1 och ℓ_2 är två geodetiska linjer på sfären så definierar vi vinkeln α mellan dem som den Euklidiska vinkeln i $\mathbb{R}^3$. Detta är ekvivalent med följande. Om ℓ_j är snitt mellan sfären och planet genom origo med enhetsnormal $\mathbf{n}_j$, (längden av $\mathbf{n}_j$ är 1) så är α vinkeln mellan $\mathbf{n}_1$ och $\mathbf{n}_2$, dvs

$$\cos\alpha = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2$$

Observera att vinkeln inte är entydigt definierad med denna formel. Det finns ju två enhetsnormaler till vardera plan. Om vi emellertid kräver att vinkeln α skall väljas i intervallet $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ blir vinkeln entydigt definierad.
Vinkeln mellan två geodetiska linjer är invariant under sfäriska isometrier. Om vinkeln mellan ℓ_1 och ℓ_2 är α så är således vinkeln mellan bilderna av ℓ_1 och ℓ_2 också α.



Vi kommer nu till begreppet *sfärisk triangel.* En sådan definieras med hjälp av tre punkter A, B, C på sfären och triangeln utgörs av dessa tre punkter samt de geodetiska bågarna mellan dem.

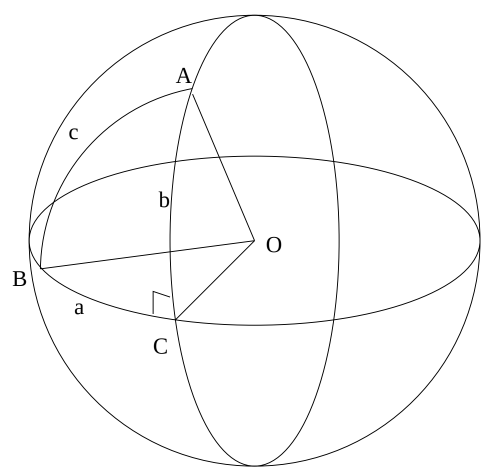


Man kan naturligtvis bygga upp en samling formler som beskriver samband mellan sidornas längder (dvs de geodetiska avstånden mellan triangelns hörn) och triangelns vinklar. Vi avstår från det, men ger ett exempel (utan bevis).

Sats 1 (Pythagoras sats på sfären) *Om ABC är en sfärisk triangel med sidorna a, b resp c och om vinkeln vid hörnet C är rät så är*

$$\cos c = \cos a \cos b$$

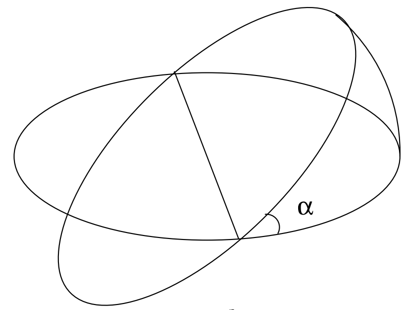
Här är således a och b katetrarna och c hypotenusan.



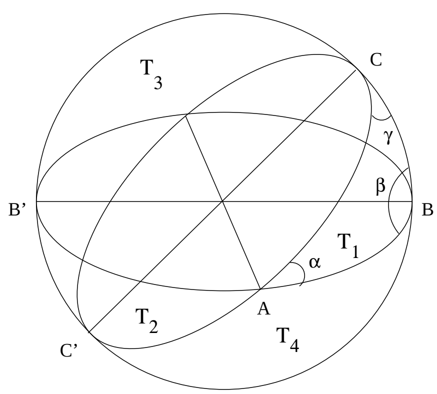
Arean av en sfärisk triangel

Vi avstår från att göra en generell definition av area av ett område på sfären och nöjer oss med att definiera area för speciellt enkla områden, framför allt sfäriska trianglar. Observera först att arean av hela sfären $\mathbb{S}$ är 4π. (Det kan man till exempel visa genom att tillämpa en formel för en rotationsytas area.) Arean av ett halvklot är därför 2π.

Det är därför naturligt att sätta arean av området i figuren till 2α eftersom området utgör α/π av hela övre halvklotet. Arean av ett sådant område blir då invariant under sfäriska isometrier eftersom dessa lämnar vinklar mellan geodetiska linjer oförändrade. Områden av detta utseende kallar vi halvmånar.



I följande figur har vi ritat en sfärisk triangel ABC. Det plan som skär ut storcirkeln genom B och C har placerats i papperets plan och punkten A ligger ovanför detta plan. Figuren beskriver och ger namn åt fyra områden T_1, T_2, T_3, T_4 vilka alla ligger på den halvsfär som ligger över papperets plan. Punkterna B' och C' är antipoderna till B resp. C, dvs de är spegelbilderna i origo av B resp. C. De ligger därför båda i papperets plan. De fyra områden begränsas av sfäriska trianglar.



T_1	begränsas av triangeln	ABC
T_2	begränsas av triangeln	$AB'C'$
T_3	begränsas av triangeln	$AB'C$
T_4	begränsas av triangeln	ABC'

Låt oss spegla T_2 i origo. Vi får då ett område som tillsammans med T_1 utgör en halvmåne med vinkeln 2α. Eftersom spegling är en sfärisk isometri måste den lämna arean oförändrad. Därför måste arean av trianglar definieras så att

$$\text{arean}(T_1) + \text{arean}(T_2) = 2\alpha$$

Av liknade skäl måste

$$\text{arean}(T_1) + \text{arean}(T_3) = 2\beta$$

$$\text{arean}(T_1) + \text{arean}(T_4) = 2\gamma$$

Eftersom de fyra områden tillsamman utgör halvklotet över papperets plan är deras sammanlagda area 2π. Summerar vi de fyra ekvationerna ovan får vi därför att

$$2\text{arean}(T_1)+\text{arean}(T_1)+\text{arean}(T_2)+\text{arean}(T_3)+\text{arean}(T_4) = 2\text{arean}(T_1)+2\pi = 2(\alpha+\beta+\gamma)$$

vilket ger

$$\text{arean}(T_1) = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

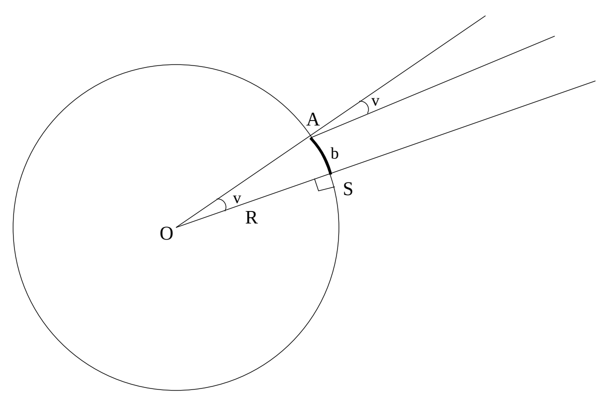
Sats 2 *Vinkelsumman i en sfärisk triangel är alltid större än π (180°). Arean av en sfärisk triangel är vinkelsumman minus π.*

Observera att det på sfären finns ett absolut mått i den meningen att vinkelmått och mått på avstånd inte kan väljas oberoende av varandra så som fallet är i planet. Det finns inte heller olika stora men likvinklika trianglar. Också det är en skillnad jämfört med planet.

Kartor

Kartor har funnits länge i mänsklighetens historia. En kartas utseende bestäms av dess ändamål. Vi skall koncentrera oss på kartor som vill beskriva "hela världen", dvs hela jordytan. Erathosthene (ca 250 fKr) visste att jorden var ett klot. Han uppskattade jordradien genom att mäta vinkelskillnaden till middagssolen på två platser vars inbördes avstånd han kände.

I figuren markerar A Alexandria vid den egyptiska Medelhavskusten, medan S är orten Syene, nuvarande Assuan, nästan rakt söder om Alexandria. Eftersom Syene ligger nästan på Kräftans vändkrets står solen där i zenit mitt på dagen vid sommarsolståndet. Samma dag avviker solestrålarna med $v = 2\pi/50$ från zenit i Alexandria. Om avståndet från A till S är b så gäller att $b = Rv$ där R är jordradien.



Genom att stega upp avståndet (!) från Alexandria till Syene fann Erathosthenes att b var lika med 5000 "stadier", (ett antikt längdmått). Alltså är

$$R = \frac{b}{v} = \frac{5000 \cdot 50}{2\pi} \approx 40000 \text{ "stadier"}$$

Den exakta längden hos en "stadie" är inte känd, men brukar anges till någonstans mellan 150 och 180 meter, vilket ger jordradien R ett värde mellan 6000 och 7200 km. En mycket god uppskattning, måste man säga!

Erathosthenes är berömd för flera kartor, vilka visar medelhavsområdet. Uppenbarligen måste Erathosthenes ha varit helt klar över att hans kartor bara visade en mindre del av jordytan. Senare gjorde Claudius Ptolemaios (ungefär 150 eKr) flera kartor över betydligt större delar av jordytan. Hans kartor sträckte sig ända bort till Kina. Det mest anmärkningsvärda med Ptolemaios kartor var att de hade ett fullt utvecklat system av parallellcirklar och meridianer och att de också är ritade med avancerade projektionsmetoder. Ptolemaios storhet som geograf förminskas något av att han grovt underskattade jorden radie. Han trodde att jordradien var 25% mindre än den verkligen var!

Ptolemaios underskattning av jordens storlek levde kvar in på 1500-talet. Den ledde till att man trodde att Kina låg längre österut än vad som verkligen är fallet. Detta bidrog till att Columbus trodde sig kunna nå Kina snabbare genom att segla västerut från Portugal.

Mot slutet av medeltiden (när kompassen kom i bruk) ritades så kallade portolankartor av kustområden med syftlinjer som liknar dagens sjökort. Under 1500-talet gjorde bl.a Amerigo Vespucci och Magellan noggranna mätningar och kartorna under 1500-och 1600-talet blev mycket exakta.

Kartografi

Ett stort problemet med att rita plana kartor av delar av jordytan är att man inte kan avbilda en del av en sfärisk yta på en plan yta utan distorsion. Den grundläggande orsaken till detta är att sfären har en positiv krökning, medan planet saknar krökning. När man försöker avbilda en sfärisk yta på ett plan måste några förhållanden gå förlorade. Att rita plana kartor är därför en fråga om att göra val. Det finns tre grundläggande geometriska storheter av särskilt intresse för den som skall använda en karta:

vinklar, avstånd, areor

En karta som återger *alla vinklar korrekt* kallas *vinkelriktig* eller *konform*. Denna typ av kartor är intressant för sjöfararen, som seglar över öppna havsvidder. En karta som återger relationerna mellan *områdens areor korrekt* kallas *ytriktig*. Denna typ av karta är lantmätarens favorit.

Det finns inga kartor som återger relationerna mellan olika kurvors längder korrekt. Om en sådan karta funnes skulle den förtjäna namnet skalenlig. Det finns emellertid approximativt skalenliga kartor inom begränsade områden (t.e.x bilkartor, kartor för orienterare). Man kan också göra kartor över större områden och tillämpa olika skalor på olika delar av dem och på så vis uppskatta även stora avstånd ganska bra. Men exakt skalenliga kartor finns inte. Det finns inte heller kartor som är både konforma och ytriktiga.

Det finns alltså två grundtyper av kartor:

konforma kartor
ytriktiga kartor

Det finns också kartor som varken är det ena eller det andra. De kanske återger vinklar bra, men inte helt rätt, samtidigt som de återger förhållandet mellan areor bra, men inte heller det helt rätt.

För att åstadkomma en karta använder man sig av någon slags *projektionsmetod*. Det finns tre grundtyper beroende på vilken sorts yta man projicerar på. Det finns s.k. *azimutala* projektioner, vilket är projektioner på plan, *cylindriska* projektioner, (projektioner på en cylinder) och *koniska* projektioner (projektion på en kon). Anledningen till att man kan vara intresserad att projicera på cylindrar och koner är att sådana ytor kan plattas ut till ett plan utan förvrängning (eftersom deras krökning är 0).

Vi skall nu beskriva en matematisk sats med vars hjälp man relativ lätt kan avgöra vilka egenskaper en given kartprojektion har. Till varje punkt $\mathbf{x}$ på vår modell $\mathbb{S}$ av jordklotet ordnar vi dess kartbild $\mathbf{y} = \mathcal{K}(\mathbf{x})$ i $\mathbb{R}^2$. Eftersom $\mathbf{x} = (\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, \sin\theta)$ kommer bilden $\mathbf{y}$ att bero av ϕ och θ. Vi skriver

$$\mathbf{y} = \mathcal{K}(\mathbf{x}) = (X(\phi,\theta), Y(\phi,\theta))$$

Punkterna på en viss parallellcirkel $\theta = \theta_0$ kommer att avbildas på kurvan

$$X = X(\phi,\theta_0), Y = Y(\phi,\theta_0), -\pi \le \phi \le \pi$$

Riktningen hos denna kurva får man genom att derivera med avseende på ϕ. Tangenten till kurvan i punkten $\phi = \phi_0$ är

$$\Big(\frac{\partial X}{\partial\phi}(\phi_0,\theta_0), \frac{\partial Y}{\partial\phi}(\phi_0,\theta_0)\Big)$$

Kartans bild av en parallellcirkel kommer alltså att vara en kurva i $XY-$planet vars tangent beskrivs av

$$\mathbf{u} = \Big(\frac{\partial X}{\partial\phi}, \frac{\partial Y}{\partial\phi}\Big)$$

På samma sätt kommer en viss meridian, $\phi = \phi_0$, att avbildas på kurvan

$$X = X(\phi_0,\theta), Y = Y(\phi_0,\theta), -\pi/2 \le \theta \le \pi/2$$

Tangenten till denna kurva (i punkten $\theta = \theta_0$) är

$$\Big(\frac{\partial X}{\partial\theta}(\phi_0,\theta_0), \frac{\partial Y}{\partial\theta}(\phi_0,\theta_0)\Big)$$

Kartans bild av en meridian kommer alltså att vara en kurva vars tangent beskrivs av vektorn

$$\mathbf{v} = \Big(\frac{\partial X}{\partial\theta}, \frac{\partial Y}{\partial\theta}\Big)$$

Eftersom meridianer och parallellcirklar skär varandra under rät vinkel så måste–på en konform karta–vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vara ortogonala, dvs $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$. Genom att jämföra tangentriktningar för andra kurvor på sfären med deras bilder på kartan kan man visa att man dessutom måste ha $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\cos^2\theta$. Man kan visa följande sats.

Sats 3 *En kartprojektion $\mathcal{K}$ är konform om och endast om*

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=0,\quad \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}=\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\cos^2\theta$$

för alla ϕ och θ. Kartprojektionen $\mathcal{K}$ är ytriktig då och endast då

$$A=\Big|\frac{\partial X}{\partial\phi}\frac{\partial Y}{\partial\theta}-\frac{\partial X}{\partial\theta}\frac{\partial Y}{\partial\phi}\Big|=k|\cos\theta|,\quad (k \text{ är en konstant})$$

för alla ϕ och θ.

Man kan tolka A som arean av den parallellogram som spänns upp av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$. Observera att $\mathbf{u}$,$\mathbf{v}$ och A beror av ϕ och θ. Satsens villkor för ytriktighet kommer alltså ifrån en jämförelse mellan arean av små områden på kartan med motsvarande område på sfären. Ett bevis för satsen ges i kapitlet om differentialgeometri. Vi nöjer oss med ett exempel. Det kommer att spela en viss roll i samband med den hyperboliska geometrin.

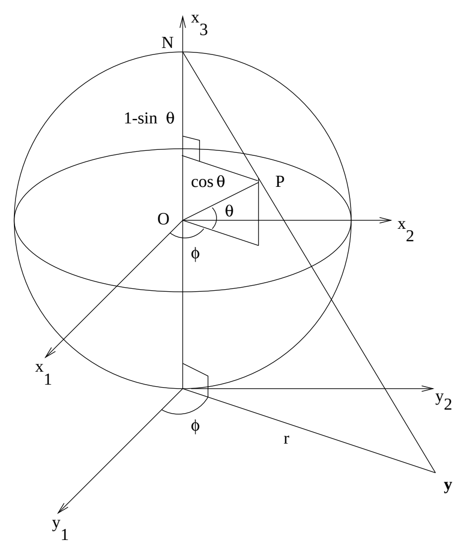
Exempel 1 Vi skall betrakta så kallad *stereografisk projektion*. Det är ett exempel på azimutal projektion, dvs projektion på ett plan. Vi skall anta att projektionsplanet tangerar sfären vid sydpolen. Givet en punkt på sfären, drar vi en rät linje från nordpolen genom punkten. Denna linje träffar projektionsplanet i en punkt, som är kartbilden av den givna punkten. En figur illustrerar konstruktionen.

Man projicerar alltså punkten $P=(\cos\theta\cos\phi,\cos\theta\sin\phi,\sin\theta)$ på punkten $\mathbf{y}=(r\cos\phi,r\sin\phi)$. De två likformiga rätvinkliga trianglarna i figuren ger att

$$\frac{r}{2}=\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$$

det vill säga

$$r=\frac{2\cos\theta}{1-\sin\theta}$$



Med satsens beteckningar har vi alltså att $X(\phi,\theta)=r\cos\phi$ och $Y(\phi,\theta)=r\sin\phi$, där r ges av formeln ovan. Eftersom

$$\frac{dr}{d\theta}=\frac{2}{1-\sin\theta}=\frac{r}{\cos\theta}$$

får vi att

$$\frac{\partial X}{\partial\theta}=\frac{r}{\cos\theta}\cos\phi,\quad \frac{\partial Y}{\partial\theta}=\frac{r}{\cos\theta}\sin\phi$$

Vidare gäller att

$$\frac{\partial X}{\partial \phi} = -r \sin \phi, \quad \frac{\partial Y}{\partial \phi} = r \cos \phi$$

Därför är

$$\mathbf{u} = r(-\sin \phi, \cos \phi), \quad \mathbf{v} = \frac{r}{\cos \theta}(\cos \phi, \sin \phi)$$

Detta ger i sin tur att

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = r^2, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \frac{r^2}{\cos^2 \theta}, \ \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0, \quad A = \frac{r^2}{|\cos \theta|}$$

Det följer att $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = r^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \cos^2 \theta$ men att $A \neq k|\cos \theta|$. Av satsen drar vi alltså slutsatsen att

stereografisk projektion är konform men inte ytriktig

Följande figur visar hur meridianer (med intervall 15°) och parallellcirklar (från 20°N till 80°S med intervall 10°) avbildas med stereografisk projektion. I figuren har vi ritat ut en så kallad *loxodrom*, vilket är en kurva som skär alla meridianer under samma vinkel.